ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕРНОЙ ЭХО

В.П. Житников, А.Р. Ураков

Уфимский государственный авиационный технический университет
sintez@ugatu.ac.ru

Краевые задачи на области с неизвестной нестационарной границей характерны для размерной электрохимической обработки (ЭХО), где неизвестной границей является поверхность обрабатываемого материала. В настоящее время чаще рассматриваются плоские задачи такого типа, для решения которых применяются методы теории функций комплексного переменного (ТФКП). Даже при достаточно сильных допущениях используемые численные методы обычно плохо сходятся, требуют большого объема вычислений и дают удовлетворительный результат только при достаточной гладкости нестационарных границ. В отличие от этого, приведенный здесь численно-аналитический способ решения позволяет достаточно быстро получать результаты с хорошей точностью.

Способ решения заключается в том, что форма обрабатываемой поверхности задается в параметрическом виде комплексной функцией $z(u,\tau)$, где u - действительная переменная, значение которой определяет положение точки на границе, τ - время. Краевое условие на искомой границе в процессе размерной ЭХО определяется законом Фарадея, который в терминах ТФКП можно записать в виде [1]:

$$\Delta z = kE\Delta\tau,\ k = \frac{M\kappa\eta}{nN_A e\rho}, \tag{1}$$

где $z=x+iy$ - точка, расположенная на начальной поверхности; $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ - приращение координат точки поверхности после обработки, продолжавшейся малый отрезок времени $\Delta\tau$; $E=E_x+iE_y$ - вектор напряженности электрического поля, который считается направленным по нормали к обрабатываемой поверхности (что объясняется эквипотенциальностью этой поверхности); M, n, ρ – атомная масса, валентность и плотность металла (материала детали), κ – электропроводность электролита, η – выход по току, принимаемый постоянной величиной, N_A – число Авогадро, e – заряд электрона.

При подстановке производной z в (1) необходимо учитывать следующее обстоятельство. Согласно (1) при электрохимическом растворении точка $z(u,\tau)$ сдвигается по нормали к исходной поверхности, но при переходе к новой форме изменяется конформное отображение, при этом

$$z(u,\tau)+\Delta z(u,\tau)=z_1(u+\Delta u,\tau+\Delta\tau), \qquad (2)$$

то есть новое положение точки z определяется новым значением параметра u. В дифференциальной форме (2) запишется как

$$dz(u,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}(u,\tau)d\tau+\frac{\partial}{\partial u}(u,\tau)du\,.$$

Выражая напряженность в виде $E=\mathrm{grad}\varphi=\overline{dW/dz}$ (где ($W=\varphi+i\psi$ - комплексный потенциал [2]) и учитывая эквипотенциальность обрабатываемой поверхности, получим краевое условие нестационарной задачи

$$-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial\tau}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial\tau}=-k\frac{d\psi}{du}\,. \qquad (3)$$

В качестве примера рассматривается задача размерной ЭХО плоской поверхности проволочным электродом-инструментом (ЭИ), (сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1а). Здесь ADB – граница растворяемого материала, C – точка расположения ЭИ в рассматриваемом сечении (рис. 1а). Вид области, соответствующей МЭП, в плоскости комплексного потенциала W приведен на рис. 1б. Для удобства решения применяется отображение физической области на полукруг $|\zeta|<1$, $\mathrm{Im}\zeta>0$ (рис. 1в).

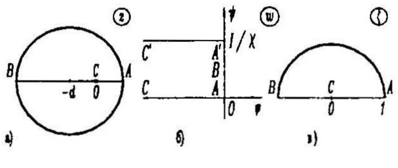

Рис. 1

Отображая верхний полукруг на область комплексного потенциала W, получим:

$$W=\frac{I}{\kappa\pi}\ln\zeta,$$

где I - ток, приходящийся на единицу длины ЭИ.

В силу симметрии решение можно искать на первой четверти круга. На дуге окружности $\zeta = e^{i\sigma}$

$$W = i\psi = i\frac{I}{k\pi}\sigma$$

Выберем в (4) u=σ. Тогда получим краевое условие (3) в удобном для решения данной задачи виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial \sigma}+\frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial \sigma}=-\frac{Ik}{\kappa\pi}\ . \qquad (4)$$

В начальный момент времени известна форма границы обрабатываемого материала z(σ,0). Получить z(σ,τ) можно, используя приращение по методу Эйлера $y(\sigma_m, \tau_{j+1}) = y(\sigma_m, \tau_j) + \frac{\partial y}{\partial \tau}(\sigma_m)\Delta\tau$. По узловым значениям $y(\sigma_m,\tau_{j+1})$ проводится сплайн, затем по формуле Шварца восстанавливается $z(\sigma_m,\tau_{j+1})$. Как видно из краевого условия (4), для поиска $\partial z/\partial\tau$ достаточно знать $\partial z/\partial\sigma$. Производная $\partial z/\partial\sigma$ может быть найдена путем дифференцирования интеграла Шварца.

Для поиска $\partial z/\partial\tau$ можно использовать два способа. В первом способе применяется преобразование краевого условия (4) к условию краевой задачи Римана-Гильберта [2], которая в свою очередь сводится к краевой задаче Гильберта-Привалова. В другом способе мнимая часть $\partial z/\partial\tau$ представляется в виде сплайна, а действительная восстанавливается по формуле Шварца. Обе части подставляются в краевое условие (4) и выполняется подбор коэффициентов сплайна для удовлетворения (4) в узловых точках.

Таким образом, разработан удобный численно-аналитический метод расчета форм обрабатываемой поверхности в ходе нестационарной размерной ЭХО. Метод нетрудно модифицировать для учета нелинейных характеристик выхода по току и потенциалов поляризации на границах электродов и электролита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ураков А.Р. *Автомодельное решение нестационарной задачи электрохимической обработки двугранным электродом-инструментом* // Математическое моделирование в решении научных и технических задач. – Уфа: УГАТУ, 1994. – С.29-32.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Наука. – 1973. – 736 с.